ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΕΠΙΘΕΤΟ	ΟΝΟΜΑ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	ΒΑΘΜΟΙ

ΘΕΜΑ Α

Α.1) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να δειχτεί ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$ ΜΟΝΑΔΕΣ: 5

Α.2) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α , β] με α < β. Αν :

* η f είναι συνεχής στο [α , β] και
* $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον x_0 με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$ και άρα η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος $[f(\alpha), f(\beta)]$ ή του διαστήματος $[f(\beta), f(\alpha)]$.

Είναι η πιο πάνω πρόταση αληθινή; Παίρνει η f και άλλες τιμές εκτός από αυτές που αναφέρθηκαν πιο πάνω; Γιατί; ΜΟΝΑΔΕΣ: 3

Α.3) Να συμπληρώσετε τα κενά στην πιο κάτω πρόταση:

Α.3.α)

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, αν μια συνάρτηση f είναι . . . . στο διάστημα . . . . και . . . . στο . . . . και . . . . τότε . . . . ένα, τουλάχιστον . . . . τέτοιο, ώστε . . . . ΜΟΝΑΔΕΣ: 2

Α.3.β)

Αν σε ένα διάστημα Δ είναι $f^{(\nu)}(x) \neq 0$ (ν-στη παράγωγος της f), τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει .. . . ρίζες στο Δ.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 2

Α.4) Να χαρακτηρισθεί κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις Σωστή ή Λάθος:

Α.4.1) Για να ορισθεί το άθροισμα, ή η διαφορά, ή το γινόμενο δυο ή πιο πολλών συναρτήσεων , θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους, να έχουν κοινά στοιχεία.

Α.4.2) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα παρουσιάζει μέγιστο στο $-x_0$ που είναι υποχρεωτικά στο πεδίο ορισμού της.

Α.4.3) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, τότε η σύνθεσή τους $f \circ g$, είναι γνήσια αύξουσα

Α.4.4) Κάθε συνεχής συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών, έχει μέγιστο και ελάχιστο.

Α.4.5) Αν $f(x)=1-\frac{|x|}{x}$ τότε ισχύει $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

Α.4.6) Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι παραγωγίσιμη, στο πεδίο ορισμού της.

Α.4.7) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$ με α>0 είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και ισχύει $f'(x)=x.\alpha^{x-1}$.

Α.4.8) Υπάρχουν συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle, χωρίς να ισχύουν όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος.

Α.4.9) Για τη συνάρτηση $f(x)=-4(x+1)^2$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=[-4,3]$ υπάρχει μόνο ένα τοπικό ακρότατο.

Α.4.10) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f''(x)\leq 0$ για κάθε πραγματική τιμή του x , τότε η C_f (γραφική παράσταση της f), δεν έχει σημεία καμπής. ΜΟΝΑΔΕΣ: 7

Α.5) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της Α-στήλης του πιο κάτω πίνακα Ι , το πλήθος των σημείων καμπής που αναφέρεται στη Β-στήλη, συμπληρώνοντας έναν πίνακα σαν τον ΙΙ.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Α-στήλη	Β-στήλη
1. $f(x)=e^x$ με $x\in\mathbb{R}$	Α. Κανένα
2. $f(x)=-3x^7+x-4$ με $x\in\mathbb{R}$	Β. Ένα
3. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ με $x\in\mathbb{R}$	Γ. Δυο
4. $f(x)=-x^4+24x^3-x+24$ με $x\in\mathbb{R}$	Δ. Τρία
5. $f(x)=\ln x$ με x>0	Ε/ Τέσσερα
	ΣΤ. Πέντε
	Ζ. Έξη
	Η. Επτά
	Θ. Άπειρα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

1.	2.	3.	4.	5.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 5

Α.6) Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

Α.6.1) Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha,\beta]$.
Το Θ.Μ.Τ. (Θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού), ισχύει για την f, όταν:

Α. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

Γ. Ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$.

Δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και συνεχής για x=α και x=β.

Ε. Κανένα από τα πριν.

Α,6,2) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών, είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους και ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Ποιά από τις παρακάτω συνθήκες πρέπει να ισχύει επί πλέον, ώστε $f(x)=g(x)$, για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

Α. Οι συναρτήσεις f και g , να είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β. $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ. $f(2040)=g(2040)$

Δ. $f''(x)=g''(x)+c$ με c σταθερά, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ε. Κανένα από τα πριν.

ΜΟΝΑΔΕΣ: 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$, με x>0 και το σημείο $\mathrm{M}(\alpha,\ln\alpha)$ με α>0

Β.1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ.

Β.2) Για ποια τιμή του α η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

Β.3) Αν το σημείο Μ απομακρύνεται από τον άξονα ψ΄ψ με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2\dfrac{m}{\sec}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία η εφαπτομένη στο Μ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β.4) Για τη συνάρτηση g ισχύουν: $g(1)=3$ και $g'(x)=e^{3-g(x)}$ για κάθε x>0 .

Β.4.α) Να βρεθεί η g (ο τύπος της (οι τιμές της)).

Β.4.β) Πως από τη γραφική παράσταση της f γίνεται η γραφική παράσταση της g ;

Β.5) Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6.f^2(x)-8.f(x)+1}{3^{2x+1}-2.3^x-1}$

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, είναι δυο τουλάχιστον φορές παραγωγίσιμη, με και $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ και $g''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$g(0)=g'(0)=1$ και $\left(\dfrac{g(x)}{g'(x)}\right)^2=\dfrac{g''(x)}{g'(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δειχτεί:

Γ.1) $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. και

Γ.2) $g(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ.3) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x=a$, να δειχτεί:

Γ.3.α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{x.f(x)-\alpha.f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha.f'(\alpha)$.

Γ.3.β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x).f(x)-g(\alpha).f(\alpha)}{x-\alpha}=g(\alpha).\left[f(\alpha)+f'(\alpha)\right]$,

με $g(x)=e^x$.

Γ.4) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha\,,\,\beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^\alpha<\frac{e^\beta-e^a}{\beta-\alpha}<e^\beta .$$

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\eta\mu x)-3}{\eta\mu x.\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{3}{2}$$ και $$f'(x).f''(x)=\frac{\ln x-3}{x}$$ για κάθε x>0

Δ.1) Να δειχτεί $f(1)=3$ και $f'(1)=-3$.

Δ.2) Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης: $g(x)=x.\ln x-4x$.

Δ.3) Να δειχτεί ότι η σχέση: $f'(x).f''(x)=\frac{\ln x-3}{x}$ για κάθε x>0

είναι ισοδύναμη με την: $\left(\left[f'(x)\right]^2\right)'=\left((\ln x-3)^2\right)'$.

Να δειχτεί: $\left[f'(x)\right]^2=\left[g'(x)\right]^2 \Leftrightarrow \left|f'(x)\right|=\left|g'(x)\right|$.

Δ.4) Αν $f'(x)=g'(x)$ για κάθε x>0να δείξετε ότι:

$$f(x)=x.\ln x-4x+7.$$

Για την $f(x)=x.\ln x-4x+7$

Δ.4.α) Να βρεθεί το όριο: $\lim_{x\to-\infty}\left[\left(x^2+1\right).f\left(x^2\right)-x^2.f\left(x^2+1\right)\right]$.

Δ.4.β) Να βρεθεί η εξίσωση τη εφαπτομένης (ευθείας), σε σημείο $\Sigma\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ με $0<x_1<e$ (της γραφικής παράστασης της f (δηλαδή της C_f)) που περνάει από το σημείο $E(e, 6-3e)$.

Ευχόμαστε επιτυχίες