**** ΙΔΙΩΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΔΟΥΡΑΧΑΝΗΣ ****
*** Τηλ. 26510 52247 ΔΟΥΡΑΧΑΝΗ ΙΩΑΝΝΙΝΑ ***
** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ **
* ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ *

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

(1) ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

Παρατήρηση:

Όταν μου δίνουν μια παράσταση και μου λένε να την κάνω γινόμενο παραγόντων, το πρώτο που κοιτάω είναι **αν βγαίνει κοινός παράγοντας** και τον βγάζω.

Για να βγάλω κοινό παράγοντα:

Α) Βρίσκω τον **ΜΚΔ** των αριθμών

Β) Παίρνω τα κοινά γράμματα (μόνο τα κοινά) και με **τον μικρότερο εκθέτη** (από αυτούς που έχω).

Γ) **Κάνω διαίρεση** και το πηλίκο το βάζω σε παρένθεση.

(1.Α) Παράδειγμα:

Να γίνει γινόμενο παραγόντων η:

$$30x^4 - 12x^3 + 18x^2 = 6x^2\left(5x^2 - 2x + 3\right)$$

ΜΚΔ με το υπόλοιπο:

30 12 18 6 12 6 6 0 0	Γράφω τους αριθμούς Γράφω τον μικρότερο από κάτω και διαιρώ ↑ Γράφωτο υπόλοιπο της διαίρεσης ↑← ----------------------

ΜΚΔ με την γραμμή δίπλα

Γράφω τους αριθμούς	
Διαιρώ και το πηλίκο το βάζω κάτω από τον αριθμό που διαίρεσα. Αν δεν διαιρείται γράφω τον ίδιο	
Βάζω τόνο αν τους διαιρεί όλους	
Τελειώνω όταν βγουν όλα μονάδες	
Για ΜΚΔ παίρνω το γινόμενο των αριθμών που έχουν τόνο	

ΜΚΔ (12, 30, 18)=2.3=6

12	30	18	2΄
6	15	9	2
3	15	9	3΄
1	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

(1.Β) Παράδειγμα: $15x^3-5x^2+5x=5x\left(3x^2-x+1\right)$

Παρατήρηση:

1) Όταν βγάζουμε κοινό παράγοντα, στην παρένθεση το πλήθος των μονωνύμων είναι, όσο είναι το αρχικό πλήθος των μονωνύμων.

2) Όταν βγάζοντας κοινό παράγοντα, παίρνουμε ένα ολόκληρο μονώνυμο, στη θέση του μένει η μονάδα (το 1)

(2) ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Όταν έχω διαφορά τέλειων τετραγώνων:
Παίρνω σε μια παρένθεση, **το άθροισμα των βάσεων** και την παρένθεση αυτή την πολλαπλασιάζω, με μια άλλη παρένθεση, όπου βάζω **τη διαφορά των βάσεων.**

$$\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 = (\mathrm{A}+\mathrm{B}).(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(2.Α) $x^2 - \psi^2 = (x+\psi).(\chi - \psi)$	
(2.Β) $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x+6).(x-6)$	Το γράφω διαφορά τέλειων τετραγώνων. Εφαρμόζω τον τύπο.
(2.Γ) $25x^2 - 49 = (5x)^2 - 7^2 =$ $=(5x+7).(5x-7)$	Το γράφω διαφορά τέλειων τετραγώνων. Εφαρμόζω τον τύπο.
(2.Δ) $64\alpha^2\beta^4 - 1 = (8\alpha\beta^2)^2 - 1^2 =$ $=(8\alpha\beta^2+1)(8\alpha\beta^2-1)$	Το γράφω διαφορά τέλειων τετραγώνων. Εφαρμόζω τον τύπο.
(2.Ε) $144 - x^6\psi^8 = 12^2 - (x^3\psi^4)^2 =$ $=(12+x^3\psi^4)(12-x^3\psi^4)$	Το γράφω διαφορά τέλειων τετραγώνων. Εφαρμόζω τον τύπο.
(2.ΣΤ) $20x^2 - 45\psi^2 = 5(4x^2 - 9\psi^2) =$ $=5(2x+3\psi).(2x-3\psi)$ Γιατί: $4x^2 - 9\psi^2 = (2x)^2 - (3\psi)^2 =$ $=(2x+3\psi)(2x-3\psi)$	Βγάζω κοινό παράγοντα. Το γράφω διαφορά τέλειων τετραγώνων. Εφαρμόζω τον τύπο.

(3) ΟΜΑΔΕΣ

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν 2 ή 4 ή 6 ή 8 ή ... μονώνυμα.

Τα χωρίζω σε ομάδες: Δυο-δυο (ίσου πλήθους μονωνύμων)
Τρία-τρια
Τέσσερα-τέσσερα ...
Σε κάθε ομάδα βγάζουμε κοινό παράγοντα
(πρέπει να μένει ίδια παρένθεση_
Βγάζουμε κοινό παράγοντα την ΚΟΙΝΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να γίνει γινόμενο παραγόντων η:

(3.Α) $\alpha x-\beta x+\alpha\psi-\beta\psi=$ $=\underbrace{\alpha x-\beta x}+\underbrace{\alpha\psi-\beta\psi}=$ $=x(\alpha-\beta)+\psi(\alpha-\beta)=$ $=(\alpha-\beta).(x+\psi)$	Τα χωρίζω σε δυο ομάδες. Βγάζω σε κάθε ομάδα κοινό παράγοντα. Βγάζω κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση. Τώρα έγινε γινόμενο παραγόντων.
(3.Β) $6\alpha x-4\beta x-9\alpha\psi+6\beta\psi=$ $=\underbrace{6\alpha x-4\beta x}-\underbrace{9\alpha\psi+6\beta\psi}=$ $=2x(3\alpha-2\beta)-3\psi(3\alpha-2\beta)=$ $=(3\alpha-2\beta).(2x-3\psi)$	Τα χωρίζω σε δυο ομάδες. Βγάζω σε κάθε ομάδα κοινό παράγοντα. Βγάζω κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση. Τώρα έγινε γινόμενο παραγόντων.

(3.Γ) $6x^3-15x^2+21x-4x^2\psi+10x\psi-14\psi=$ $=\underbrace{6x^3-15x^2+21x}-\underbrace{4x^2\psi+10x\psi-14\psi}=$ $=3x\left(2x^2-5x+7\right)-2\psi\left(2x^2-5x+7\right)=$ $=\left(2x^2-5x+7\right)\left(3x-2\psi\right)$	Τα χωρίζω σε δυο ομάδες. (ή σε τρεις ομάδες και δυο-δυο) Βγάζω σε κάθε ομάδα κοινό παράγοντα. Βγάζω κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση. Τώρα έγινε γινόμενο παραγόντων.

(3.Δ) $x^2-\left(4-3\sqrt{7}\right)x-12\sqrt{7}=$ $=x^2-4x+3\sqrt{7}\,x-12\sqrt{7}=$ $=\underbrace{x^2-4x}+\underbrace{3\sqrt{7}\,x-12\sqrt{7}}=$ $=x\left(x-4\right)+3\sqrt{7}\left(x-4\right)=$ $=\left(x-4\right)\left(x+3\sqrt{7}\right)$	Κάνω πράξεις να φύγει η παρένθεση. Τα χωρίζω σε δυο ομάδες. Βγάζω σε κάθε ομάδα κοινό παράγοντα. Βγάζω κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση. Τώρα έγινε γινόμενο παραγόντων.

(3.Ε) $x^2-\left(5\alpha-3\beta\right)x-15\alpha\beta=$ $=x^2-5\alpha x+3\beta x-15\alpha\beta=$ $=\underbrace{x^2-5\alpha x}+\underbrace{3\beta x-15\alpha\beta}=$ $=x\left(x-5\alpha\right)+3\beta\left(x-5\alpha\right)=$ $=\left(x-5\alpha\right)\left(x+3\beta\right)$	Κάνω πράξεις να φύγει η παρένθεση. Τα χωρίζω σε δυο ομάδες. Βγάζω σε κάθε ομάδα κοινό παράγοντα. Βγάζω κοινό παράγοντα την κοινή παρένθεση. Τώρα έγινε γινόμενο παραγόντων.

(4) ΠΩΣ ΦΤΙΑΧΝΩ ΤΕΛΕΙΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Τα μονώνυμα είναι τρία.

Πρέπει να έχουμε δυο τέλεια τετράγωνα με πρόσημο +
και ένα τρίτο μονώνυμο..
Φτιάχνω τα τέλεια τετράγωνα και πρέπει το διπλάσιο γινόμενο των βάσεων είναι το τρίτο μονώνυμο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ Να γραφεί σαν τέλειο τετράγωνο,
άρα γινόμενο παραγόντων

(4.Α) $x^2+10x+25$ Άρα: $x^2+10x+25=\underbrace{x^2}_{\downarrow \atop x^2}+2.x.5+\underbrace{25}_{\downarrow \atop 5^2}=$ $=\left(x+5\right)^2$	**Προσδιορίζω τα τέλεια τετράγωνα** και τα γράφω σαν τέλεια τετράγωνα. Βρίσκω το διπλάσιο γινόμενο **των βάσεων** και πρέπει να είναι ίσο με το τρίτο. Τότε παίρνω μόνο τις βάσεις με + αν το διπλάσιο γινόμενο έχει + (συν) και - αν το διπλάσιο γινόμενο έχει - (πλην). Τα βάζω σε παρένθεση και την υψώνω στο τετράγωνο.
(4.Β) $x^2-12x+36$ Άρα: $x^2-12x+36=\underbrace{x^2}_{\downarrow \atop x^2}-2.x.6+\underbrace{36}_{\downarrow \atop 6^2}=$ $=\left(x-6\right)^2$	**Προσδιορίζω τα τέλεια τετράγωνα** και τα γράφω σαν τέλεια τετράγωνα. Βρίσκω το διπλάσιο γινόμενο **των βάσεων** και πρέπει να είναι ίσο με το τρίτο. Τότε παίρνω μόνο τις βάσεις με +(ανάμεσα) αν το διπλάσιο γινόμενο, έχει + (συν) και - (ανάμεσα) αν το διπλάσιο γινόμενο, έχει - (πλην). Τα βάζω σε παρένθεση και την υψώνω στο τετράγωνο.

(4.Γ) $-x^2+14x-49$ Άρα: $-x^2+14x-49=-\left(x^2-14x+49\right)=$ $=-\left(\underbrace{x^2}_{x^2}-2.x.7+\underbrace{49}_{7^2}\right)=$ =-$\left(x-7\right)^2$	Τα τέλεια τετράγωνα έχουν και τα δυο - (πλην), άρα πρώτα βγάζω κοινό παράγοντα το - (πλην)
(4.Δ) $9x^2+4-12x$ Άρα: $9x^2+4-12x=\underbrace{9x^2}_{(3x)^2}+\underbrace{4}_{2^2}-2.3x.2=$ $=\left(3x-2\right)^2$	(4.Ε) $-16x^2-25\psi^2+40x\psi$ Άρα: $-16x^2-25\psi^2+40x\psi=-\left(16x^2-40x\psi+25\psi^2\right)=$ $=-\left(\underbrace{16x^2}_{(4x)^2}-2.4x.5\psi+\underbrace{25\psi^2}_{(5\psi)^2}\right)=$ =-$\left(4x-5\psi\right)^2$
(4.ΣΤ) $9\alpha^2x^6+12\alpha x^3\psi+4\psi^2$ Άρα: $9\alpha^2x^6+12\alpha x^3\psi+4\psi^2=\underbrace{9\alpha^2x^6}_{(3\alpha x^3)^2}+2.3\alpha x^3.2\psi+\underbrace{4\psi^2}_{(2\psi)^2}=$ $=\left(3\alpha x^3+2\psi\right)^2$	(4.Ζ) $-25x^4-60x^2\beta^4\psi-36\beta^8\psi^2$ Άρα: $-25x^4-60x^2\beta^4\psi-36\beta^8\psi^2=-\left(25x^4+60x^2\beta^4\psi+36\beta^8\psi^2\right)=$ $=-\left(\underbrace{25x^4}_{(5x^2)^2}+2.5x^2.6\beta^4\psi+\underbrace{36\beta^8\psi^2}_{(6\beta^4\psi)^2}\right)=$ =-$\left(5x^2+6\beta^4\psi\right)^2$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΓΙΑ ΤΕΛΕΙΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

Να συμπληρωθεί το τριώνυμο και να γραφεί σαν τέλειο τετράγωνο:

(4.Η) $x^2-18x......$ Έχουμε: $x^2-18x......=x^2-2.x.9+9^2=$ $=(x-9)^2$	(4.Θ) $x^2+121+......$ Έχουμε: $x^2+121+......=x^2+11^2+2.x.11=$ $=(x+11)^2$
(4.Ι) $x^2+24x\psi^3......$ Έχουμε: $x^2+24x\psi^3......=x^2+2.x.12\psi^3+(12\psi^3)=$ $=(x+12\psi^3)^2$	(4.ΙΑ) $-30\alpha x^2+25\alpha^2x^4......$ Έχουμε: $-30\alpha x^2+25\alpha^2x^4......=-30\alpha x^2+(5\alpha x^2)^2......=$ $=-2.5\alpha x^2.3+(5\alpha x^2)^2......=$ $=-2.5\alpha x^2.3+(5\alpha x^2)^2+3^2=(5\alpha x^2-3)^2=$ $=(3-5\alpha x^2)^2$
(4.ΙΒ) $64-48x^4......$ Έχουμε: $64-48x^4......=8^2-2.8.3x^4+(3x^4)^2=$ $=(8-3x^4)^2=(3x^4-8)^2$	(4.ΙΓ) $81-36x^2......$ Έχουμε: $81-36x^2......=9^2-2.9.2x^2+(2x^2)^2=$ $=(2x-9)^2=(9-2x)^2$
(4.ΙΔ) $9\psi^4+144\psi^2x^6-......$ Έχουμε: $9\psi^4+144\psi^2x^6-......=$ $=(3\psi^2)^2+(12\psi x^3)^2-2.3\psi^2.12\psi x^3=$ $=(3\psi^2)^2+(12\psi x^3)^2-72\psi^3x^3=$ $=(3\psi^2-12\psi x^3)^2=\left[3\psi(\psi-4x^3)\right]^2=$ $=9\psi^2(\psi-4x^3)^2$	(4.ΙΕ) $25\alpha^4x^2+16\pm......$ Έχουμε: $25\alpha^4x^2+16\pm......=$ $=(5\alpha^2x)^2+4^2\pm2.5\alpha^2x.4=$ $=(5\alpha^2x\pm4)^2$

(5) ΟΜΑΔΕΣ

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν (δίνονται) 4 ή 6 μονώνυμα.

Αν είναι τέσσερα:
Τα χωρίζω σε ομάδες: Τρία-Ένα
Στην περίπτωση αυτή:
Τα τρία δίνουν ένα τέλειο τετράγωνο και το άλλο γράφεται τέλειο τετράγωνο.
Έτσι έχουμε διαφορά τετραγώνων και άρα γίνεται γινόμενο παραγόντων.
(Παίρνω σε μια παρένθεση **το άθροισμα των βάσεων** (επί) σε άλλη παρένθεση **τη διαφορά των βάσεων**).
ΠΡΟΣΕΧΩ αν κάθε παρένθεση (παράγοντας) που βρέθηκε, γίνεται γινόμενο παραγόντων.

Αν είναι έξη:
Τα χωρίζω σε ομάδες τρια-τρία.
Στην περίπτωση αυτή: Τα τρία δίνουν ένα τέλειο τετράγωνο και τα άλλα τρία άλλο (δεύτερο) τέλειο τετράγωνο.
Έτσι έχουμε διαφορά τετραγώνων.
(Παίρνω σε μια παρένθεση **το άθροισμα των βάσεων** (επί) σε άλλη παρένθεση **τη διαφορά των βάσεων**).
ΠΡΟΣΕΧΩ αν κάθε παρένθεση (παράγοντας) που βρέθηκε, γίνεται γινόμενο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να γίνει γινόμενο (πρώτων) παραγόντων.

(5.Α) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=$ $=\underbrace{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}-\gamma^2=$ $=(\alpha-\beta)^2-\gamma^2=$ $=(\alpha-\beta+\gamma).(\alpha-\beta-\gamma)$	Τα τρία πρώτα είναι τέλειο τετράγωνο. Το τέταρτο είναι τέλειο τετράγωνο Διαφορά τετραγώνων (άθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων)

(5.Β) $4x^2-12x+9-9\psi^2=$ $=\underbrace{4x^2-12x+9}-9\psi^2=$ $=(2x)^2-2.2x.3+3^2-(3\psi)^2=$ $=(2x-3)^2-(3\psi)^2=$ $=(2x-3+3\psi)(2x-3-3\psi)$	Τα τρία πρώτα είναι τέλειο τετράγωνο. Το τέταρτο είναι τέλειο τετράγωνο Διαφορά τετραγώνων (άθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων)
(5.Γ) $4x^2+30\psi-9-25\psi^2=$ $=4x^2-(25\psi^2-30\psi+9)=$ $=4x^2-\underbrace{(25\psi^2-30\psi+9)}=$ $=(2x)^2-\left[(5\psi)^2-2.5\psi.3+3^2\right]=$ $=(2x)^2-(5\psi-3)^2=$ $=\left[2x+(5\psi-3)\right].\left[2x-(5\psi-3)\right]=$ $=(2x+5\psi-3).(2x-5\psi+3)$	Τα τρία τελευταία είναι τέλειο τετράγωνο. Τα τέλεια τετράγωνα έχουν πλην, άρα βγάζουμε κοινό παράγοντα το πλην. Το πρώτο είναι τέλειο τετράγωνο Διαφορά τετραγώνων (άθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων) ** ΠΡΟΣΕΧΩ τη διαφορά των βάσεων (χρησιμοποιώ αγκύλες).
(5.Δ) $x^2-\alpha^2-\beta^2-8x-2\alpha\beta+16=$ $=x^2-8x+16-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=$ $=x^2-8x+16-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$ $=x^2-2.x.4+4^2-(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=$ $=(x-4)^2-(\alpha+\beta)^2=$ $=\left[(x-4)+(\alpha+\beta)\right].\left[(x-4)-(\alpha+\beta)\right]=$ $=(x-4+\alpha+\beta).(x-4-\alpha-\beta)$	Βάζω τα μονώνυμα σε τάξη. Τα τρία πρώτα είναι (γράφονται) τέλειο τετράγωνο. Τα τρία τελευταία είναι τέλειο τετράγωνο. Τα τέλεια τετράγωνα έχουν πλην, άρα βγάζουμε κοινό παράγοντα το πλην. Διαφορά τετραγώνων (άθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων) ** ΠΡΟΣΕΧΩ τη διαφορά των βάσεων (χρησιμοποιώ αγκύλες).

(6) **ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ**

Όταν έχουμε **άθροισμα ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ**
Αυτό είναι ίσον:
Σε μια παρένθεση παίρνω **το άθροισμα των βάσεων**
Και την παρένθεση την πολλαπλασιάζω με μια άλλη παρένθεση, όπου βάζω:
Το τετράγωνο της πρώτης βάσης
- (πλην) το γινόμενο των βάσεων
+ (συν) το τετράγωνο της δεύτερης βάσης.

$$\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3=\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right).\left(\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(6.Α) $x^3+8=$ $=x^3+2^3=$ $=\left(x+2\right).\left(x^2-x.2+2^2\right)=$ $=\left(x+2\right).\left(x^2-2x+4\right)$	Το γράφω σαν άθροισμα τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.
(6.Β) $27x^3+1=$ $=\left(3x\right)^3+1^3=$ $=\left(3x+1\right).\left[\left(3x\right)^2-3x.1+1^2\right]=$ $=\left(3x+1\right).\left(9x^2-3x+1\right)$	Το γράφω σαν άθροισμα τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.
(6.Γ) $64+125x^3=$ $=4^3+\left(5x\right)^3=$ $=\left(4+5x\right).\left[4^2-4.5x+\left(5x\right)^2\right]=$ $=\left(5x+4\right).\left(25x^2-20x+16\right)$	Το γράφω σαν άθροισμα τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.

(7) **ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ**

Όταν έχουμε **διαφορά ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ**
Αυτό είναι ίσον:
Σε μια παρένθεση παίρνω **τη διαφορά των βάσεων**
Και την παρένθεση την πολλαπλασιάζω με μια άλλη παρένθεση, όπου βάζω:
Το τετράγωνο της πρώτης βάσης
+(συν) το γινόμενο των βάσεων
+ (συν) το τετράγωνο της δεύτερης βάσης.

$$A^3 - B^3 = \left(A - B\right).\left(A^2 + AB + B^2\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(7.Α) $x^3 - 27 =$ $= x^3 - 3^3 =$ $= \left(x-3\right).\left(x^2 + x.3 + 3^2\right) =$ $= \left(x-3\right).\left(x^2 + 3x + 9\right)$	Το γράφω σαν διαφορά τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.
(7.Β) $27x^3 - 1 =$ $= \left(3x\right)^3 - 1^3 =$ $= \left(3x-1\right).\left[\left(3x\right)^2 + 3x.1 + 1^2\right] =$ $= \left(3x-1\right).\left(9x^2 + 3x + 1\right)$	Το γράφω σαν διαφορά τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.
(7.Γ) $8\psi^3 - 125x^3 =$ $= \left(2\psi\right)^3 - \left(5x\right)^3 =$ $= \left(2\psi - 5x\right).\left[\left(2\psi\right)^2 + 2\psi.5x + \left(5x\right)^2\right] =$ $= \left(2\psi - 5x\right).\left(4\psi^2 + 10x\psi + 25x^2\right)$	Το γράφω σαν διαφορά τέλειων κύβων. Εφαρμόζω τον κανόνα (τύπο) Κάνω πράξεις.

ΠΡΟΣΕΧΩ:
Πρώτα κοιτάω αν βγαίνει ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ.

(8) ΔΙΑΦΟΡΑ ή ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΕ ΙΔΙΟΥΣ ΕΚΘΕΤΕΣ

Όταν έχω διαφορά δυο ίδιων δυνάμεων με άρτιο εκθέτη,
πρώτα τις γράφω διαφορά τετραγώνων,
μετά:
(άθροισμα βάσεων). (διαφορά βάσεων)

ΠΡΟΣΕΧΩ ΑΝ ΣΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(8.Α) $A^4-B^4=\left(A^2\right)^2-\left(B^2\right)^2=$ $=\left(A^2+B^2\right).\left(A^2-B^2\right)=$ $=\left(A^2+B^2\right).\left(A+B\right).\left(A-B\right)$	Το γράφω διαφορά τετραγώνων (αθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων) Έχω πάλι διαφορά τετραγώνων (αθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων)
(8.Β) $A^6-B^6=\left(A^3\right)^2-\left(B^3\right)^2=$ $=\left(A^3+B^3\right).\left(A^3-B^3\right)$ $=\left(A+B\right).\left(A^2-AB+B^2\right).\left(A-B\right)\left(A^2+AB+B^2\right)$	Το γράφω διαφορά τετραγώνων Έχω άθροισμα κύβων και διαφορά κύβων
(8Γ) $A^8-B^8=\left(A^4\right)^2-\left(B^4\right)^2=$ $=\left(A^4+B^4\right).\left(A^4-B^4\right)$ $=\left(A^4+B^4\right).\left(A^2+B^2\right).\left(A^2-B^2\right)=$ $=\left(A^4+B^4\right)\left(A^2+B^2\right).\left(A+B\right).\left(A-B\right)$	Το γράφω διαφορά τετραγώνων (αθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων) Έχω πάλι διαφορά τετραγώνων (αθροισ. βάσεων).(διαφ. βάσεων)

(8.Δ)

$$A^5+B^5=$$
$$=\left(A+B\right).\left(A^4-A^3B+A^2B^2-AB^3+B^4\right)$$

(8.Ε)

$$A^5 - B^5 =$$
$$= (A - B).(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4)$$

(8.ΣΤ)

$$A^6 + B^6 =$$
$$= (A^2)^3 + (B^2)^3 =$$
$$= (A^2 + B^2).\left[(A^2)^2 - A^2B^2 + (B^2)^2\right] =$$
$$= (A^2 + B^2)(A^4 - A^2B^2 + B^4)$$

(8.Ζ)

$$A^7 - B^7 =$$
$$= (A - B).(A^6 + A^5B + A^4B^2 + A^3B^3 + A^2B^4 + AB^5 + B^6)$$

(8.Η)

$$A^7 + B^7 =$$
$$= (A + B).(A^6 - A^5B + A^4B^2 - A^3B^3 + A^2B^4 - AB^5 + B^6)$$

(8.Θ)

$$A^9 + B^9 =$$
$$= (A^3)^3 + (B^3)^3 =$$
$$= (A^3 + B^3).\left[(A^3)^2 - A^3B^3 + (B^3)^2\right] =$$
$$= (A^3 + B^3)(A^6 - A^3B^3 + B^6)$$

(8.Ι)

$$A^9 - B^9 =$$
$$= (A^3)^3 - (B^3)^3 =$$
$$= (A^3 - B^3).\left[(A^3)^2 + A^3B^3 + (B^3)^2\right] =$$
$$= (A^3 - B^3)(A^6 + A^3B^3 + B^6)$$

(9) ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Όταν έχω ένα τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$

Βρίσκω δυο αριθμούς ρ_1 **και** ρ_2 **με άθροισμα** β **και γινόμενο** γ**. Δηλαδή** $\rho_1+\rho_2=\beta$ **και** $\rho_1.\rho_2=\gamma$ **και έχουμε:**

Με αυτούς τους αριθμούς κάνω διάσπαση του βx

με βx= ρ_1.x+ ρ_2.x και μετά κατά ομάδες

Ή **γρήγορη παραγοντοποίηση**: $x^2+\beta x+\gamma=(x+\rho_1).(x+\rho_2)$

$x^2+\beta x+\gamma=x^2+(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1.\rho_2=$ $=x^2+\rho_1.x+\rho_2.x+\rho_1.\rho_2=$ $=x(x+\rho_1)+\rho_2(x+\rho_1)=$ $=(x+\rho_1).(x+\rho_2)$	Κάνω πράξεις και παίρνω κατά ομάδες. το τελικό αποτέλεσμα είναι: $x^2+\beta x+\gamma=(x+\rho_1).(x+\rho_2)$

ΠΑΡΑΔΕΪΓΜΑΤΑ: Να γίνει γινόμενο το τριώνυμο:

(9.Α) $x^2-2x-15$ Άρα: $x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$ Αναλυτικά: $x^2-2x-15=x^2+3x-5x-15=$ $=x(x+3)-5(x+3)=$ $=(x+3)(x-5)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -2 και Γινόμενο -15 άρα ετερόσημοι με απόλυτα μεγαλύτερο τον αρνητικό Οι αριθμοί αυτοί είναι 3 και -5
(9.Β) $x^2+9x+14$ Άρα: $x^2+9x+14=(x+2)(x+7)$ Αναλυτικά: $x^2+9x+14=x^2+2x+7x+14=$ $=x(x+2)+7(x+2)=$ $=(x+2)(x+7)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 9 και Γινόμενο 14 άρα ομόσημοι και θετικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι 2 και 7

(9.Γ) $x^2-12x+32$ Άρα: $x^2-8x+16=(x-4)(x-4)=$ $=(x-4)^2$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -12 και Γινόμενο 32 άρα ομόσημοι και αρνητικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι -4 και -8
(9.Δ) $x^2+5x-24$ Άρα: $x^2+5x-24=(x-3)(x+8)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 5 και Γινόμενο -24 άρα ετερόσημοι και απόλυτα μεγαλύτερο τον θετικό Οι αριθμοί αυτοί είναι -3 και 8
(9.Ε) $x^2+12x+36$ Άρα $x^2+12x+36=(x+6)(x+6)=$ $=(x+6)^2$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 12 και Γινόμενο 36 άρα ομόσημοι και θετικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι 6 και 6
(9.ΣΤ) $x^2-8x+16$ Άρα: $x^2-8x+16=(x-4)(x-4)=$ $=(x-4)^2$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -8 και Γινόμενο 16 άρα ομόσημοι και αρνητικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι -4 και -4

<table>
<tr>
<td>(9.Ζ)
Να γίνει γινόμενο παραγόντων
το: $5x^2-2x-16$
Βρίσκω δυο αριθμούς με:
Άθροισμα -2 και
Γινόμενο 5.(-16)=-80
Άρα ετερόσημοι με απόλυτα μεγαλύτερη την αρνητική
Οι αριθμοί αυτοί είναι
8 και -10
Με αυτούς
κάνω διάσπαση του -2x
σε 8x και -10x

Άρα:
$5x^2-2x-16=5x^2-10x+8x-16=$
$=5x(x-2)+8(x-2)=$
$=(x-2)(5x+8)$</td>
<td>Όταν έχω ένα τριώνυμο
$\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma\neq 0$:
Βρίσκω δυο αριθμούς ρ_1 και ρ_2
με άθροισμα β και γινόμενο $\alpha.\gamma$
Δηλαδή $\rho_1+\rho_2=\beta$
και $\rho_1.\rho_2=\alpha.\gamma$
και κάνω διάσπαση του β με
τους δυο αριθμούς ρ_1 και ρ_2
Δηλαδή: $\beta x=\rho_1.x+\rho_2.x$

Μετά κατά ομάδες.

***
Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και με εξίσωση δεύτερου βαθμού. **Στο (9)**</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>(9.Η)
$3x^2-10x+8$

Άρα:
$3x^2-10x+8=3x^2-4x-6x+8=$
$=x(3x-4)-2(3x-4)=$
$=(3x-4)(x-2)$</td>
<td>Βρίσκω δυο αριθμούς με:
Άθροισμα -10 και
Γινόμενο 3.8=24
Άρα ομόσημοι αρνητικοί

Οι αριθμοί αυτοί είναι
-4 και -6
Με αυτούς
κάνω διάσπαση του -10x
σε -4x και -6x
Μετά κατά ομάδες</td>
</tr>
</table>

(9.Θ) $2x^2+11x+15$ Άρα: $2x^2+11x+15$ $2x^2+11x+15=2x^2+5x+6x+15=$ $=x(2x+5)+3(2x+5)=$ $=(2x+5)(x+3)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 11 και Γινόμενο 2.15=30 Άρα ομόσημοι θετικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι 5 και 6 Με αυτούς κάνω διάσπαση του 11x σε 5x και 6x Μετά κατά ομάδες
(9.Ι) $8x^2+14x+3$ Άρα: $8x^2+14x+3=8x^2+2x+12x+3=$ $=2x(4x+1)+3(4x+1)=$ $=(4x+1)(2x+3)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 14 και Γινόμενο 8.3=24 Άρα ομόσημοι θετικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι 2 και 12 Με αυτούς κάνω διάσπαση του 14x σε 2x και 12x Μετά κατά ομάδες
(9.ΙΑ) $6x^2-x-12$ Άρα: $6x^2-x-12=6x^2+8x-9x-12=$ $=2x(3x+4)-3(3x+4)=$ $=(3x+4)(2x-3)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -1 και Γινόμενο 6.(-12)=-72 Άρα ετερόσημοι με απόλυτα μεγαλύτερο τον αρνητικό Οι αριθμοί αυτοί είναι 8 και -9 Με αυτούς κάνω διάσπαση του -x σε 8x και -9x Μετά κατά ομάδες

(9.ΙΒ) $6x^2+7x-3$ Άρα: $6x^2+7x-3=6x^2-2x+9x-3=$ $=2x(3x-1)+3(3x-1)=$ $=(3x-1)(2x+3)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα 7 και Γινόμενο 6.(-3)=-18 Άρα ετερόσημοι με απόλυτα μεγαλύτερο τον θετικό Οι αριθμοί αυτοί είναι -2 και 9 Με αυτούς κάνω διάσπαση του 7x σε -2x και 9x Μετά κατά ομάδες
(9.ΙΓ) $10x^2-23x+12$ Άρα: $10x^2-23x+12=10x^2-8x-15x+12=$ $=2x(5x-4)-3(5x-4)=$ $=(5x-4)(2x-3)$	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -23 και Γινόμενο 10.12=120 Άρα ομόσημοι αρνητικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι -8 και -15 Με αυτούς κάνω διάσπαση του -23x σε -8x και -15x Μετά κατά ομάδες
(9.ΙΔ) $4x^2-20x+25$ Άρα: $4x^2-10x+25=4x^2-10x-10x+25=$ $=2x(2x-5)-5(2x-5)=$ $=(2x-5)(2x-5)=(2x-5)^2$ ** Μπορεί να γίνει η παραγοντοποίηση και με άλλο τρόπο π.χ. τέλειο τετράγωνο.	Βρίσκω δυο αριθμούς με: Άθροισμα -20 και Γινόμενο 4.25=100 Άρα ομόσημοι αρνητικοί Οι αριθμοί αυτοί είναι -10 και -10 Με αυτούς κάνω διάσπαση του -20x σε -10x και -10x Μετά κατά ομάδες

(10) **Εξισώσεις δεύτερου βαθμού.**

Εξίσωση δεύτερου βαθμού λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

Η ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΓΙΝΕΤΑΙ

Α) Υπολογίζεται η διακρίνουσά της: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Β) Εφαρμόζεται ο τύπος: $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

** Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει **δυο ρίζες (λύσεις)** άνισες μεταξύ τους

** Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **μια διπλή ρίζα**
(δυο ρίζες ίσες μεταξύ τους) την: $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

** Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές ρίζες**.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΠΟΙΗΣΗ του τριωνύμου:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

Για να αναλυθεί το $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha \neq 0$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

Α) Αν $\Delta > 0$ η εξίσωση έχει **δυο ρίζες (λύσεις)** άνισες μεταξύ τους τις ρ_1 και ρ_2.

Τότε αναλύεται σε γινόμενο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)$

Β) Αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **μια διπλή ρίζα**

(δυο ρίζες ίσες μεταξύ τους) την: $x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$

Τότε αναλύεται σε γινόμενο: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Γ) Αν $\Delta < 0$ η εξίσωση **δεν έχει πραγματικές ρίζες**.

Δεν το αναλύουμε σε γινόμενο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να γίνει γινόμενο παραγόντων το τριώνυμο:

(10.Α) x^2-6x+8 **Παραγοντοποίηση:** $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$	Επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης: $x^2-6x+8=0$ $\alpha=1 \quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4.1.8=$ $\beta=-6 \quad =36-32=4$ $\gamma=8$ $\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma: \quad x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2.1}=\frac{6\pm2}{2}=$ $=\begin{cases}\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4\\ \frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2\end{cases}$ άρα ρίζες $\{2,\ 4\}$

(10.Β) $x^2+7x+12$ **Παραγοντοποίηση:** $x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$	Επίλυση της αντίστοιχης εξίσωσης: $x^2+7x+12=0$ $\alpha=1 \quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=7^2-4.1.12=$ $\beta=7 \quad =49-48=1$ $\gamma=12$ $\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma: \quad x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2.1}=\frac{-7\pm1}{2}=$ $=\begin{cases}\frac{-7+1}{2}=\frac{-6}{2}=-3\\ \frac{-7-1}{2}=\frac{-8}{2}=-4\end{cases}$ άρα ρίζες $\{-4,\ -3\}$

(10.Γ) $6x^2-x-12$ **Παραγοντοποίηση:** $6x^2-x-12=6\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=$ $=6\frac{2x-3}{2}.\frac{3x+4}{3}=(2x-3)(3x+4)$ Άρα: $6x^2-x-12=(3x+4)(2x-3)$	$6x^2-x-12=0$ $\alpha=6 \quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4.6.(-12)=$ $\beta=-1 \quad =1+288=289$ $\gamma=-12$ $\rho\acute{\iota}\zeta\varepsilon\varsigma: \quad x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{1\pm\sqrt{289}}{2.6}=\frac{1\pm17}{12}=$ $=\begin{cases}\frac{1+17}{12}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\\ \frac{1-17}{12}=\frac{-16}{12}=-\frac{4}{3}\end{cases}$ άρα ρίζες $\left\{\frac{3}{2},\ -\frac{4}{3}\right\}$

(10.Δ)

$4x^2-x-14$ ρίζες $\left\{-\frac{7}{4},\ 2\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$4x^2-x-14=4\left(x+\frac{7}{4}\right)(x-2)=$$

$$=4\frac{4x+7}{4}.(x-2)=(4x+7)(x-2)$$

(10.Ε)

$8x^2+14x+3$ ρίζες $\left\{-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$8x^2+14x+3=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=8.\frac{2x+3}{2}.\frac{4x+1}{4}=(2x+3)(4x+1)$$

(10.ΣΤ)

$4x^2-4x+1$ ρίζες $\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=4.\frac{2x-1}{2}.\frac{2x-1}{2}=(2x-1)^2$$

(10.Ζ)

$9x^2+24x+16$ ρίζες $\left\{-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$9x^2+24x+16=9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=$$

$$=9.\frac{3x+4}{3}.\frac{3x+4}{3}=(3x+4)^2$$

(10.Η)

$15x^2-26x+8$ ρίζες $\left\{\frac{2}{5},\ \frac{4}{3}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$15x^2-26x+8=15\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=15.\frac{5x-2}{5}.\frac{3x-4}{3}=(5x-2)(3x-4)$$

(10.Θ)

$6x^2+23x+20$ ρίζες $\left\{-\frac{5}{2},\ -\frac{4}{3}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$6x^2+23x+20=6\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=$$

$$=6.\frac{2x+5}{2}.\frac{3x+4}{3}=(2x+5)(3x+4)$$

(10.Ι)

$12x^2+x-6$ ρίζες $\left\{-\frac{3}{4},\ \frac{2}{3}\right\}$

Παραγοντοποίηση:

$$12x^2+x-6=12\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=12.\frac{4x+3}{4}.\frac{3x-2}{3}=(4x+3)(3x-2)$$

(10.ΙΑ)

$4x^2-3x+2$

Παραγοντοποίηση:

$\Delta=(-3)^2-4.4.2=9-32=-23<0$

δεν έχει πραγματικές ρίζες

Άρα δεν το κάνουμε γινόμενο παραγόντων

(11) ΤΕΤΑΡΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Όταν έχω τέταρτες δυνάμεις:
Σχηματίζω τέλειο τετράγωνο και μετά διαφορά τετραγώνων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων το:

(11.Α) x^4+6x^2+25 $x^4+6x^2+25=\left(x^2\right)^2+6x^2+5^2=$ $=\left(x^2\right)^2+2.x^2.5+5^2-4x^2=$ $=\left(x^2+5\right)^2-\left(2x\right)^2=$ $=\left(x^2+5+2x\right)\left(x^2+5-2x\right)=$ $=\left(x^2+2x+5\right)\left(x^2-2x+5\right)$ Οι παρενθέσεις έχουν αρνητική διακρίνουσα και δεν τις κάνουμε γινόμενο παραγόντων.	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα x^4 και το 25, με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.
(11.Β) x^4-10x^2+9 $x^4-10x^2+9=\left(x^2\right)^2-2.x^2.3+3^2-4x^2=$ $=\left(x^2-3\right)^2-\left(2x\right)^2=$ $=\left(x^2-3+2x\right)\left(x^2-3-2x\right)=$ $=\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2-2x-3\right)=$ $=\left(x-1\right)\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-3\right)$ Τα τριώνυμα στις παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων και έγιναν	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα x^4 και το 9, με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.

(11.Γ) $9x^4-6\alpha^2x^2+25\alpha^4$ $9x^4-6\alpha^2x^2+25\alpha^4=$ $=\left(3x^2\right)^2+2.3x^2.5\alpha^2+\left(5\alpha^2\right)^2-36\alpha^2x^2=$ $=\left(3x^2+5\alpha^2\right)^2-\left(6\alpha x\right)^2=$ $=\left(3x^2+6\alpha x+5\alpha^2\right)\left(3x^2-6\alpha x+5\alpha^2\right)$ Οι παρενθέσεις έχουν αρνητική διακρίνουσα και δεν τις κάνουμε γινόμενο παραγόντων.	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα $9x^4$ και το $25\alpha^4$, με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.

(11.Δ) $x^4+16\psi^4-x^2\psi^2$ $x^4+16\psi^4-x^2\psi^2=$ $=\left(x^2\right)^2+2.x^2.4\psi^2+\left(4\psi^2\right)^2-9x^2\psi^2=$ $=\left(x^2+4\psi^2\right)^2-\left(3x\psi\right)^2=$ $=\left(x^2+3x\psi+4\psi^2\right)\left(x^2-3x\psi+4\psi^2\right)$ Οι παρενθέσεις έχουν αρνητική διακρίνουσα και δεν τις κάνουμε γινόμενο παραγόντων.	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα x^4 και το $16\psi^4$. Παίρνουμε αυτά γιατί είναι ομόσημα και με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.

(11.Ε) $4x^4+25-29x^2$ $4x^4+25-29x^2=$ $=\left(2x^2\right)^2-2.2x^2.5+5^2-9x^2=$ $=\left(2x^2\right)^2-2.2x^2.5+5^2-\left(3x\right)^2=$ $=\left(2x^2-5\right)^2-\left(3x\right)^2=$ $=\left(2x^2+3x-5\right)\left(2x^2-3x-5\right)=$ $=\left(x-1\right)\left(2x+5\right)\left(x+1\right)\left(2x-5\right)$ Οι παρενθέσεις έχουν θετική διακρίνουσα και τις κάνουμε γινόμενο παραγόντων.	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα x^4 και το $16\psi^4$. Παίρνουμε αυτά γιατί είναι ομόσημα και με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.

(11.ΣΤ) $x^4+25\psi^4-26x^2\psi^2$ $x^4+25\psi^4-26x^2\psi^2=$ $=\left(x^2\right)^2-2.x^2.5\psi^2+\left(5\psi^2\right)^2-16x^2\psi^2=$ $=\left(x^2-5\psi^2\right)^2-\left(4x\psi\right)^2=$ $=\left(x^2+4x\psi-5\psi^2\right)\left(x^2-4x\psi-5\psi^2\right)=$ $=\left(x-\psi\right)\left(x+5\psi\right)\left(x+\psi\right)\left(x-5\psi\right)$ Οι παρενθέσεις έχουν θετική διακρίνουσα και τις κάνουμε γινόμενο παραγόντων.	Τα τέλεια τετράγωνα είναι τα x^4 και το $25\psi^4$. Παίρνουμε αυτά γιατί είναι ομόσημα και με αυτά φτιάχνω ένα τέλειο τετράγωνο και προσθέτω και αφαιρώ κατάλληλη ποσότητα ή κάνω διάσπαση του τρίτου, για να ισχύει το ίσον που γράφουμε. Έτσι έχω διαφορά τετραγώνων. ΠΡΟΣΕΧΩ: Αν οι παρενθέσεις γίνονται γινόμενο παραγόντων.

(12) ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΩΝΥΜΩΝ

Εφαρμόζεται σε πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές.

1) Βρίσκω το σταθερό πηλίκο (ΣΠ)

$$\text{Σταθερό Πηλίκο}=\frac{\text{Σταθερός όρος}}{\text{Συντελεστής Μεγιστοβάθμιου όρου}}$$

** Αν το πολυώνυμο δεν έχει σταθερό όρο, βγάζω κοινό παράγοντα τον άγνωστο με εκθέτη, τον μικρότερο από τους εκθέτες που έχει το πολυώνυμο και έτσι έχω σταθερό όρο.**

2) Βρίσκω **τους ακέραιους που διαιρούν τον αριθμητή του σταθερού πηλίκου (ΣΠ).**

2.α) Αν το πολυώνυμο έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι ίση με έναν από τους ακέραιους που βρέθηκαν πιο πάνω.
Αν ρ ο αριθμός αυτός, τότε το πολυώνυμο διαιρείται με το διώνυμο $x-\rho$ (x η μεταβλητή του πολυωνύμου), άρα ένας παράγοντας του πολυωνύμου είναι ο $x-\rho$.

2.β) Βρίσκω όλα τα κλάσματα που **ο αριθμητής** τους διαιρεί τον **αριθμητή** του σταθερού πηλίκου (ΣΠ) και **ο παρονομαστής** τους διαιρεί τον **παρονομαστή** του σταθερού πηλίκου (ΣΠ).
Αν το πολυώνυμο έχει κλασματική ρίζα, αυτή θα είναι ίση με ένα από τα κλάσματα, που βρέθηκαν πιο πάνω.

** Αν το κλάσμα αυτό είναι το $\frac{\lambda}{\kappa}$ τότε το πολυώνυμο διαιρείται

με το: **κ**x-**λ**, άρα το πολυώνυμο έχει παράγοντα το: **κ**x-**λ**.

3) Σχήμα Horner

3.α) Γράφω τους συντελεστές του πολυωνύμου
(πρέπει να έχω γράψει το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής (του αγνώστου) του πολυωνύμου, συνήθως μεταβλητή είναι η x). ΑΡΙΣΤΕΡΑ.

* Αν λείπει κάποιος βαθμός (όρος), σαν συντελεστή βάζω το 0 (μηδέν)

3.β) Βάζω τον αριθμό που ελέγχω αν είναι ρίζα, ΔΕΞΙΑ.

3.γ) 1.Κατεβάζω τον πρώτο από ΑΡΙΣΤΕΡΑ αριθμό
2. Πολλαπλασιάζω και το γινόμενο το βάζω ΠΑΝΩ ΔΙΠΛΑ
3. Προσθέτω
↱ 4. Πολλαπλασιάζω και το γινόμενο το βάζω ΠΑΝΩ ΔΙΠΛΑ
↑ 5. Προσθέτω ↓
↥←←←←←←←↵

** Είναι ρίζα αν το τελευταίο άθροισμα είναι ΜΗΔΕΝ.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

12.Α) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το: $\Pi(x) = x^3 + x^2 - 14x - 24$

Σταθερό πηλίκο: $\Sigma.\Pi. = \dfrac{24}{1}$

Διαιρέτες του αριθμητή: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$

** Αν το πολυώνυμο $\Pi(x)$ έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι ίση με έναν από τους πιο πάνω διαιρέτες του αριθμητή.

** Κάνω σχήμα Horner για τα 1, -1,2 και δεν είναι ρίζες. Για το -2.

Σχήμα Horner

$\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -14 & -24 & -2 \\ & -2 & 2 & 24 & \\ \hline 1 & -1 & -12 & 0 & \end{array}$	1)Κατεβάζω το 1 2)Το πολλαπλασιάζω με το -2 (3)**Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.** 4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα το βάζω ακριβώς από κάτω 5) Ότι βρέθηκε το πολλαπλασιάζω με το -2 6) Πάω στο (3)

Άρα το -2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $\Pi(x)$, άρα το $\Pi(x)$ διαιρείται με το $x+2$ (έχει παράγοντα το $x+2$) έτσι το $\Pi(x)$ γράφεται:

$$\Pi(x)=x^3+x^2-14x-24=$$

$$=(x+2)(x^2-x-12)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 1 -1 -12 της τελευταίας γραμμής.

Είναι δευτέρου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

Κάνω γινόμενο παραγόντων το x^2-x-12 και έτσι έχω:

$$\Pi(x)=x^3+x^2-14x-24=$$

$$=(x+2)(x^2-x-12)=(x+2)(x+3)(x-4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

12.Β) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το: $\Pi(x)=2x^4+x^3-33x^2-9x+135$

Σταθερό πηλίκο: $\Sigma.\Pi.=\frac{135}{2}$

Διαιρέτες του αριθμητή: $\pm1,\pm3,\pm5,\pm9,\pm15,\pm27,\pm45,\pm135$

** Αν το π0λυώνυμο $\Pi(x)$ έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι ίση με έναν από τους πιο πάνω διαιρέτες του αριθμητή.

** Κάνω σχήμα Horner για τα 1, -1, και δεν είναι ρίζες. Για το 3.

Σχήμα Horner

$\begin{array}{rrrrr\|r} 2 & 1 & -33 & -9 & 135 & 3 \\ & 6 & 21 & -36 & -135 & \\ \hline 2 & 7 & -12 & -45 & 0 & \end{array}$	1)Κατεβάζω το 2 2)Το πολλαπλασιάζω με το 3 **(3)Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.** 4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα το βάζω ακριβώς από κάτω 5) Ότι βρέθηκε το πολλαπλασιάζω με το 3 6) Πάω στο (3)

Άρα το 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $\Pi(x)$, άρα το $\Pi(x)$ διαιρείται με το $x-3$ (έχει παράγοντα το $x-3$) έτσι το $\Pi(x)$ γράφεται:

$$\Pi(x)=2x^4+x^3-33x^2-9x+135=$$
$$=(x-3)(2x^3+7x^2-12x-45)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 2 7 -12 -45 της τελευταίας γραμμής.

Είναι τρίτου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

Κάνω γινόμενο παραγόντων το $2x^3+7x^2-12x-45$:

Σχήμα Horner

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 7 & -12 & -45 & -3 \\ & -6 & -3 & 45 & \\ \hline 2 & 1 & -15 & 0 & \end{array}$$

</td>
<td>
1)Κατεβάζω το 2
2)Το πολλαπλασιάζω με το -3
(3)Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.
4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα
το βάζω ακριβώς από κάτω
5) Ότι βρέθηκε το
πολλαπλασιάζω με το -3
6) Πάω στο (3)
</td>
</tr>
</table>

και έτσι έχω:

$$\Pi(x)=2x^4+x^3-33x^2-9x+135=$$
$$=(x-3)(2x^3+7x^2-12x-45)=$$
$$=(x-3)(x+3)(2x^2+x-15)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 2 1 -15 της τελευταίας γραμμής.

Είναι δεύτερου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

Κάνω γινόμενο παραγόντων το $2x^2+x-15$ (τριώνυμο) και έχω:

$$2x^2+x-15=(x+3)(2x-5)$$

και έτσι έχω:

$$\Pi\left(x\right)=2x^4+x^3-33x^2-9x+135=$$
$$=\left(x-3\right)\left(2x^3+7x^2-12x-45\right)=$$
$$=\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(2x^2+x-15\right)=$$
$$=\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x+3\right)\left(2x-5\right)=$$
$$=\left(x-3\right)\left(x+3\right)^2\left(2x-5\right)$$

(3) Σχήμα Horner
3.α) Γράφω τους συντελεστές του πολυωνύμου
(πρέπει να έχω γράψει το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις της μεταβλητής (του αγνώστου) του πολυωνύμου, συνήθως μεταβλητή είναι η x). ΑΡΙΣΤΕΡΑ.
* Αν λείπει κάποιος βαθμός (όρος), σαν συντελεστή βάζω το 0 (μηδέν)

3.β) Βάζω τον αριθμό που ελέγχω αν είναι ρίζα, ΔΕΞΙΑ.
3.γ) 1.Κατεβάζω τον πρώτο από ΑΡΙΣΤΕΡΑ αριθμό
2. Πολλαπλασιάζω και το γινόμενο το βάζω ΠΑΝΩ ΔΙΠΛΑ
3. Προσθέτω
↱ 4. Πολλαπλασιάζω και το γινόμενο το βάζω ΠΑΝΩ ΔΙΠΛΑ
↑ 5. Προσθέτω ↓
↳←←←←←←←←↵
** Είναι ρίζα αν το τελευταίο άθροισμα είναι ΜΗΔΕΝ.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

12.Γ) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το: $\Pi\left(x\right)=-6x^6-27x^5+81x^3$

Το πολυώνυμο αυτό δεν έχει σταθερό όρο, άρα θα βγάλουμε κοινό παράγοντα την δύναμη της μεταβλητής με τον μικρότερο από τους εκθέτες που έχει. Εδώ το $-3x^3$.

Έτσι έχουμε: $\Pi\left(x\right)=-6x^6-27x^5+81x^3=-3x^3\left(2x^3+9x^2-27\right)$

Θα κάνουμε γινόμενο παραγόντων το: $P(x)=2x^3+9x^2-27$

Σταθερό πηλίκο: $Σ.Π.=\frac{27}{2}$

Διαιρέτες του αριθμητή: $\pm1, \pm3, \pm9, \pm27$

** Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι ίση με έναν από τους πιο πάνω διαιρέτες του αριθμητή.

** Κάνω σχήμα Horner για τα 1, -1,3 και δεν είναι ρίζες. Για το -3.

Σχήμα Horner

<table>
<tr>
<td>$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 9 & 0 & -27 & -3 \\ & -6 & -9 & 27 & \\ \hline 2 & 3 & -9 & 0 & \end{array}$$</td>
<td>Δεν έχει μονώνυμο πρώτου βαθμού,
στη θέση του βάζουμε 0 (μηδέν).
1)Κατεβάζω το 2
2)Το πολλαπλασιάζω με το -3
(3)Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.
4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα
το βάζω ακριβώς από κάτω
5) Ότι βρέθηκε το
πολλαπλασιάζω με το -3
6) Πάω στο (3)</td>
</tr>
</table>

Άρα το -3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, άρα το $P(x)$ διαιρείται με το $x+3$ (έχει παράγοντα το $x+3$) έτσι το $P(x)$ γράφεται:

$$P(x)=2x^3+9x^2-27=(x+3)(2x^2+3x-9)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 2 3 -9 της τελευταίας γραμμής.

Είναι δευτέρου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

Κάνω γινόμενο παραγόντων το τριώνυμο: $2x^2+3x-9$ και έτσι έχω:

$$P(x)=2x^3+9x^2-27=(x+3)(2x^2+3x-9)=$$

$$=(x+3)(x+3)(2x-3)=(x+3)^2(2x-3)$$

Άρα για το $\Pi(x)$ έχουμε:

$$\Pi(x)=-6x^6-27x^5+81x^3==-3x^3(2x^3+9x^2-27)=$$

$$=-3x^3(x+3)^2(2x-3)$$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

12.Δ) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το:

$$\Pi(x)=36x^4-187x^2-119x+60$$

Σταθερό πηλίκο: $\Sigma.\Pi.=\dfrac{60}{36}$

***(ΠΡΟΣΕΧΟΥΜΕ: Δεν το απλοποιούμε)

Διαιρέτες του αριθμητή: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm10,\pm12,\pm15,\pm20,\pm30,\pm60$

** Αν το π0λυώνυμο $\Pi(x)$ έχει ακέραια ρίζα, αυτή θα είναι ίση με έναν από τους πιο πάνω διαιρέτες του αριθμητή.

** Κάνω σχήμα Horner για τα 1, -1, …(όλα με τη σειρά) και δεν είναι ρίζες.

****Παίρνω όλα τα κλάσματα που ο αριθμητής τους διαιρεί τον αριθμητή του σταθερού πηλίκου και ο παρονομαστής τους, διαιρεί τον παρονομαστή του σταθερού πηλίκου.

* Τέτοια κλάσματα είναι: $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4},\ldots,\pm\frac{3}{2},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{15}{2},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{4}{3},\pm\frac{5}{3},\ldots$

* Αν ένα κλάσματα είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε θα είναι ένα από αυτά.

*Αν το κλάσμα $\frac{\lambda}{\kappa}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε το πολυώνυμο διαιρείται με το $x-\frac{\lambda}{\kappa}$ άρα και με το $\kappa x-\lambda$.

Σχήμα Horner

36	0	-187	-119	60	$\frac{1}{3}$
	12	4	-61	-60	
36	12	-183	-180	0	

1)Κατεβάζω το 36

2)Το πολλαπλασιάζω με το $\frac{1}{3}$

(3)Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.

4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα το βάζω ακριβώς από κάτω

5) Ότι βρέθηκε το πολλαπλασιάζω με το $\frac{1}{3}$

6) Πάω στο (3)

Άρα το $\frac{1}{3}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $\Pi(x)$, άρα το $\Pi(x)$

διαιρείται με το $x-\frac{1}{3}$ άρα και με το $3x-1$

(έχει παράγοντα το $x-\frac{1}{3}$ άρα και το $3x-1$).

Έτσι το $\Pi(x)$ γράφεται:

$$\Pi(x)=36x^4-187x^2-119x+60=$$

$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(36x^3+12x^2-183x-180\right)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 36 12 -183 -180 της τελευταίας γραμμής.

Είναι τρίτου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τέταρτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

** Αν κάνω κλάσμα το $x-\frac{1}{3}$ και βγάλω στο $36x^3+12x^2-183x-180$

κοινό παράγοντα το 3 (ο παρονομαστής του $\frac{1}{3}$ (ΠΑΝΤΑ βγαίνει κοινός παράγοντας, ο κάθε φορά παρονομαστής του αντίστοιχου κλάσματος))

Έχουμε:

$$\Pi(x)=36x^4-187x^2-119x+60=$$

$$=\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(36x^3+12x^2-183x-180\right)=$$

$$=\frac{3x-1}{3}.3\left(12x^3+4x^2-61x-60\right)=$$

$$=(3x-1)\left(12x^3+4x^2-61x-60\right)$$

Κάνω γινόμενο παραγόντων το $12x^3+4x^2-61x-60$:
**Δεν έχει ρίζα ακέραιο αριθμό και ψάχνω για κλασματική.

Σταθερό πηλίκο: $\Sigma.\Pi. = \dfrac{60}{12}$

Σχήμα Horner

<table>
<tr>
<td>

12	4	-61	-60	$-\frac{3}{2}$
	-18	21	60	
12	-14	-40	0	

</td>
<td>

1)Κατεβάζω το 12

2)Το πολλαπλασιάζω με το $-\dfrac{3}{2}$

(3)Το αποτέλεσμα το βάζω πάνω δίπλα.

4)Προσθέτω και το αποτέλεσμα το βάζω ακριβώς από κάτω

5) Ότι βρέθηκε το

πολλαπλασιάζω με το $-\dfrac{3}{2}$

6) Πάω στο (3)

</td>
</tr>
</table>

και έτσι έχω:

$$12x^3+4x^2-61x-60=\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(12x^2-14x-40\right)=$$

$$=\frac{2x+3}{2}.2.\left(6x^2-7x-20\right)=\left(2x+3\right)\left(6x^2-7x-20\right)$$

Το πηλίκο της διαίρεσης το γράφω από τους 12 -14 -40
της τελευταίας γραμμής.
Είναι δεύτερου βαθμού, γιατί διαίρεσα ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με ένα πρώτου βαθμού.

Άρα το $\Pi\left(x\right)$ γράφεται:

$$\Pi\left(x\right)=36x^4-187x^2-119x+60=\left(3x-1\right)\left(12x^3+4x^2-61x-60\right)=$$
$$=\left(3x-1\right)\left(2x+3\right)\left(6x^2-7x-20\right)$$

Κάνω γινόμενο παραγόντων το $6x^2-7x-20$ (τριώνυμο) και έχω:

$$6x^2-7x-20=\left(2x-5\right)\left(3x+4\right)$$

και έτσι έχω:

$$\Pi\left(x\right)=36x^4-187x^2-119x+60=\left(3x-1\right)\left(12x^3+4x^2-61x-60\right)=$$
$$=\left(3x-1\right)\left(2x+3\right)\left(6x^2-7x-20\right)$$
$$=\left(3x-1\right)\left(2x+3\right)\left(2x-5\right)\left(3x+4\right)$$