**** ΙΔΙΩΤΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΔΟΥΡΑΧΑΝΗΣ ****
*** Τηλ. 26510 52247 ΔΟΥΡΑΧΑΝΗ ΙΩΑΝΝΙΝΑ ***
** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ **
* ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ *

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ

(1) **Το τετράγωνο** του αθροίσματος δυο όρων (αριθμών ή μονονύμων ή πολυωνύμων ή…), είναι ίσο :
με **το τετράγωνο** του πρώτου
(+) συν το διπλάσιο γινόμενο του
πρώτου επί το δεύτερο
(+) συν το τετράγωνο του δεύτερου.

$$(A+B)^2=A^2+2.A.\mathbf{B}+B^2$$

1) $(x+5)^2 = x^2+2.x.5+5^2 =$

$= x^2+10x+25$

2) $(3x^2+4x^3)^2 = (3x^2)^2+2.3x^2.4x^3+(4x^3)^2 =$

$= 9x^4+24x^5+16x^6$

(2) **Το τετράγωνο** της διαφοράς δυο όρων (αριθμών ή μονωνύμων ή πολυωνύμων ή...), είναι ίσο :
με **το τετράγωνο** του πρώτου
(-**) πλην το διπλάσιο γινόμενο** του
πρώτου επί το δεύτερο
(+) συν το τετράγωνο του δεύτερου.

$$(A-B)^2=A^2-2.A.B+B^2$$

1) $(x-6)^2=x^2-2.x.6+6^2=$
$=x^2-12x+36$

2) $(3-5x)^2=3^2-2.3.5x+(5x)^2=$
$=9-30x+25x^2$

3) $(2x^3-7x^8)^2=(\ 2x^3)^2-2.2x^3.7x^8+(7x^8)^2=$
$=4x^6-28x^{11}+49x^{16}$

(3) **Το άθροισμα** δυο όρων **επί** τη **διαφορά**
τους είναι ίσο,
με **το τετράγωνο** του μειωτέου
πλην το τετράγωνο του αφαιρετέου
της διαφοράς.

$$\mathbf{(A+B).(A-B)=A^2-B^2}$$

1) $(x+8).(x-8)=x^2-8^2=x^2-64$
2) $(5x+12).(5x-12)=(5x)^2-12^2=25x^2-144$
3) $(7x+8x^5).(7x-8x^5)=(7x)^2-(8x^5)^2=49x^2-64x^{10}$

(4) **Ο κύβος** του αθροίσματος δυο όρων (αριθμών ή μονωνύμων ή πολυωνύμων ή...) είναι ίσος με:

Τον πρώτο στον κύβο,

(+) συν το τριπλάσιο γινόμενο του πρώτου στο τετράγωνο επί το δεύτερο (όπως είναι),

(+) συν το τριπλάσιο γινόμενο του πρώτου (όπως είναι) επί το δεύτερο στο τετράγωνο

(+) συν τον δεύτερο στον **κύβο.**

$$(A+B)^3=A^3+3.A^2.B+3.A.B^2+B^3$$

1) $(x+4)^3=x^3+3.x^2.4+3.x.4^2+4^3=$
$=x^3+3.x^2.4+3.x.16+64=$
$=x^3+12.x^2+48.x+64$

2) $(3+2x)^3=3^3+3.3^2.2x+3.3.(2x)^2+(2x)^3=$
$=27+3.9.2x+3.3.4x^2+8x^3$

3) $(5x^3+2x)^3=(5x^3)^3+3.(5x^3)^2.2x+3.5x^3.(2x)^2+(2x)^3=$
$=125x^9+3.25.x^6.2x \quad +3.5x^3.4x^2+8x^3 =$
$=125x^9+150.x^7+60.x^5+8x^3$

(5) **Ο κύβος** της διαφοράς δυο όρων (αριθμών ή μονωνύμων ή πολυωνύμων ή...) είναι ίσος με:

Τον πρώτο στον κύβο,

(-**) πλην το τριπλάσιο** γινόμενο του πρώτου στο τετράγωνο επί το δεύτερο (όπως είναι),

(+) συν το τριπλάσιο γινόμενο του πρώτου (όπως είναι) επί το δεύτερο στο τετράγωνο

(-**) πλην τον δεύτερο** στον **κύβο.**

$$\mathbf{(A-B)^3=A^3-3.A^2.B+3.A.B^2-B^3}$$

4) $(x-4)^3=x^3-3.x^2.4+3.x.4^2-4^3=$

$=x^3-3.x^2.4+3.x.16-64=$

$=x^3-12.x^2+48.x-64$

5) $(3-2x)^3=3^3-3.3^2.2x+3.3.(2x)^2-(2x)^3=$

$=27-3.9.2x+3.3.4x^2-8x^3$

6) $(5x^3-2x)^3=(5x^3)^3-3.(5x^3)^2.2x+3.5x^3.(2x)^2-(2x)^3=$

$=125x^9-3.25.x^6.2x\ \ +3.5x^3.4x^2-8x^3=$

$=125x^9-150.x^7+60.x^5-8x^3$

(6) $\mathbf{(\chi+\alpha).(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta).\chi+\alpha.\beta}$

$\mathbf{(\chi-\alpha).(\chi-\beta)=\chi^2-(\alpha+\beta).\chi+\alpha.\beta}$

(7) Για να υψώσω ένα πολυώνυμο στο **τετράγωνο**
υψώνω κάθε μονώνυμο του πολυωνύμου στο **τετράγωνο**, που τα προσθέτω
και έπειτα παίρνω **τα διπλάσια γινόμενα** (κάθε ένα με το πρόσημό του) με τον εξής τρόπο:
Το πρώτο με κάθε ένα από τα πιο κάτω (τα πιο δεξιά από αυτό),
Το δεύτερο με κάθε ένα από τα πιο κάτω (τα πιο δεξιά από αυτό),
Το τρίτο με κάθε ένα από τα πιο κάτω (τα πιο δεξιά από αυτό), **(δε γυρίζω πίσω)**,
…….και συνεχίζω όσο υπάρχουν μονώνυμα…….

1) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.\alpha.\beta+2.\alpha.\gamma+2.\beta.\gamma$
2) $(\alpha+\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2.\alpha.\beta-2.\alpha.\gamma-2.\beta.\gamma$
3) $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2.\alpha.\beta-2.\alpha.\gamma+2.\beta.\gamma$
4) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2.\alpha.\beta+2.\alpha.\gamma+$
$+2.\alpha.\delta+2.\beta.\gamma+2.\beta.\delta+2.\gamma.\delta$
5) $(\alpha-\beta-\gamma-\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2.\alpha.\beta-2.\alpha.\gamma-$
$-2.\alpha.\delta+2.\beta.\gamma+2.\beta.\delta+2.\gamma.\delta$
5) 6) $(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2.\alpha.\beta-2.\alpha.\gamma+$
$+2.\alpha.\delta+2.\beta.\gamma-2.\beta.\delta-2.\gamma.\delta$

(8) $(\alpha^2-\alpha.\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3$
(9) $(\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2).(\alpha-\beta)=\alpha^3-\beta^3$

(10) **ΔΥΩΝΥΜΟ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ** (Newton)
(α) $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4.\alpha^3.\beta+6.\alpha^2.\beta^2+4.\alpha.\beta^3+\beta^4$
(β) $(\alpha-\beta)^4=\alpha^4-4.\alpha^3.\beta+6.\alpha^2.\beta^2-4.\alpha.\beta^3+\beta^4$
(γ) $(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5.\alpha^4.\beta+10.\alpha^3.\beta^2+10.\alpha^2\beta^3+5.\alpha.\beta^4+\beta^5$

(δ) $(\alpha-\beta)^5=\alpha^5-5.\alpha^4.\beta+10.\alpha^3.\beta^2-10.\alpha^2\beta^3+5.\alpha.\beta^4-\beta^5$

(ε) $(\alpha+\beta)^6=\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+\beta^6$

(στ) $(\alpha-\beta)^6=\alpha^6-6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2-20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4-6\alpha\beta^5+\beta^6$

(ζ) $(\alpha+\beta)^7=\alpha^7+7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2+35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4+21\alpha^2\beta^5+$
$+7\alpha\beta^6+\beta^7$

(η) $(\alpha-\beta)^7=\alpha^7-7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2-35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4-21\alpha^2\beta^5+$
$+7\alpha\beta^6-\beta^7$

ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ ΠΑΣΚΑΛ (PASCAL)

1											
1	1										
1	2	1							$(\alpha\pm\beta)^2$		
1	3	3	1						$(\alpha\pm\beta)^3$		
1	4	6	4	1					$(\alpha\pm\beta)^4$		
1	5	10	10	5	1				$(\alpha\pm\beta)^5$		
1	6	15	20	15	6	1			$(\alpha\pm\beta)^6$		
1	7	21	35	35	21	7	1		$(\alpha\pm\beta)^7$		
..	..	..	..	..	..	..	..	..			
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..		
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	

$$(\alpha+\beta)^\nu=\alpha^\nu+\frac{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^{\nu-2}\beta^2+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^{\nu-3}\beta^3+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\ldots(\nu-\kappa+1)}{1.2.3.4.\ldots.\kappa}\alpha^{\nu-\kappa}\beta^\kappa+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\alpha^3\beta^{\nu-3}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\alpha^2\beta^{\nu-2}+\frac{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1}+\beta^\nu$$

(11) Ταυτότητα των τριών κύβων

(Ταυτότητα του Euler (Όϊλερ))

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3.\alpha.\beta.\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma).\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

Χρήσιμη ταυτότητα :

Αν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3.\alpha.\beta.\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \acute{\eta} \\ \alpha=\beta=\gamma \end{cases}$

(11) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

(12) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\alpha)^2]$

(13) Ταυτότητες του Lagrange (λαγκράνζ)

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow (x^2+y^2).(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha x+\beta y)^2 = \begin{vmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} x & y & \omega \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow (x^2+y^2+\omega^2).(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & \omega \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & \omega \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_\nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_\nu \end{pmatrix} \Longrightarrow (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2=$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix} \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu \\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu \end{vmatrix}^2$$

(14) **Ανισότητα του** Schwarz (Σβάρτς)

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)\geq(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

(15) Ταυτότητες Φυσικών Αριθμών

$$\Sigma_1=1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$$

$$\Sigma_2=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu-1)(2\nu+1)}{6}$$

$$\Sigma_3=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2$$

$$\Sigma_4=1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots+\nu^4=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1)}{30}$$

(16) Άλλες Ταυτότητες

**1) $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^2-2\mathrm{AB}$

**2) $\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3=(\mathrm{A}+\mathrm{B})^3-3\mathrm{AB}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$

3) $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2+2\mathrm{AB}$

4) $\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3=(\mathrm{A}-\mathrm{B})^3+3\mathrm{AB}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$

5) $\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3=(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)$

6) $\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3=(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)$